17/04/18

<u>Ορισμός</u> Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος.
Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X λέγεται <u>βασική ακολουθία</u> (ή ακολουθία Cauchy) (ως προς ρ)
αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n,m\geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$

<u>Σημείωση:</u> Η έννοια της βασικής ακολουθίας εξετάζει την εγγύτητα (δηλ. το πόσο κοντά είναι μεταξύ τους) των όρων της ακολουθίας.
Αντίθετα, η σύγκλιση ακολουθίας εξετάζει πόσο κοντά είναι οι όροι της ακολουθίας από ένα όριο στόχο.

<u>Πρόταση:</u> Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Αν η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα τότε είναι βασική.

<u>Αποδ:</u> Υποθέτουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα, δηλ. $\exists x\in X$ τ/ω $x_n \xrightarrow{\rho} x$
Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $\rho(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$
για κάθε $n\geq n_0$.
Για κάθε $n,m\geq n_0$:
$$\begin{aligned}\rho(x_n,x_m) &\leq \rho(x_n,x)+\rho(x,x_m)\\ &\leq \rho(x_n,x)+\rho(x_m,x)\\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$
Άρα η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία.

<u>Παρατήρηση:</u> Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει εν γένει.
Στο $\mathbb{Q}$ με τη συνήθη μετρική (υπόχωρος του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική)
θεωρούμε την ακολουθία $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στο $\mathbb{R}$ ($x_n\to e$) άρα είναι βασική ακολουθία του $\mathbb{Q}$, αλλά δεν υπάρχει $q\in\mathbb{Q}$ τ/ω $x_n\to q$
(αν υπήρχε τέτοιο q τότε $\left.\begin{array}{l}x_n\to q\\ x_n\to e\end{array}\right\}\Rightarrow e=q$ άτοπο διότι e άρρητος)

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μ.χ. Κάθε βασική ακολουθία είναι φραγμένη.

Αποδ: Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία.

Τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n,m \geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n,x_m)<1$

Θέτουμε $C=\max\{\rho(x_1,x_{n_0}),\rho(x_2,x_{n_0}),\dots,\rho(x_{n_0-1},x_{n_0})\}$.

Τότε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε $\rho(x_n,x_0)\leq C$

Συνεπώς για κάθε $n,m\in\mathbb{N}$: $\rho(x_n,x_m)\leq 2C$.

Άρα $\sup\{\rho(x_n,x_m)\ ,\ n,m\in\mathbb{N}\}\leq 2C<+\infty$, δηλ. η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία η οποία έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$

δηλ $\exists x\in X$, $x_{k_n}\to x$ τότε $x_n\to x$.

(*) Εφόσον (x_n) βασική

Αποδ: Έστω $\varepsilon>0$. Τότε (*) υπάρχει $n_1\in\mathbb{N}$ ώστε για $n,m\geq n_1$ να ισχύει $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon/2$ (1)

και εφόσον $x_{k_n}\to x$ υπάρχει $n_2\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\geq n_2$ να ισχύει $\rho(x_{k_n},x)<\varepsilon/2$ (2)

Θέτουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$.

Για κάθε $n\geq n_0$ έχουμε $k_n\geq n\geq n_0$ άρα $\rho(x_{k_n},x)<\varepsilon/2$ (από την (2))

και $\rho(x_{k_n},x)<\varepsilon/2$ (από την (1))

Άρα $\rho(x_n,x)\leq\rho(x_n,x_{k_n})+\rho(x_{k_n},x)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$.

Συνεπώς $x_n\xrightarrow{\rho}x$

Ορισμός: Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) λέγεται πλήρης αν κάθε βασική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον (X,ρ) είναι συγκλίνουσα (δηλ $\exists x\in X$ τ.ω. $x_n\xrightarrow{\rho}x$).

Επίσης, ένα $F\subseteq X$ λέγεται πλήρες αν ο (F,ρ_F)

(όπου ρ_F η σχετική μετρική στο F από τη ρ) είναι πλήρης.

[δηλ. αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο F υπάρχει $x\in F$ ώστε $x_n\xrightarrow{\rho}x$]

Παραδείγματα:

Ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική είναι πλήρης μετρικός χώρος
[όπως γνωρίζουμε από τον Απειρ., κάθε βασική ακολουθία στον $\mathbb{R}$ συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό]

Ο $\mathbb{Q}$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι πλήρης μ.χ. (Η ακολουθία $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι βασική ακολουθία του $\mathbb{Q}$ ενώ δεν υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ ώστε $x_n \to q$)

Ο $\mathbb{R}^k$ με τη συνήθη (ευκλείδεια) μετρική είναι πλήρης μ.χ.
Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (x_n(1), x_n(2), \dots, x_n(k))$
Ισχυρισμός: Για κάθε $i = 1, \dots, k$ η $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$

$$|x_n(i) - x_m(i)| \leq \left(\sum_{j=1}^{k} |x_n(j) - x_m(j)|^2\right)^{1/2} = \rho_2(x_n, x_m)$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε εφόσον η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\rho_2(x_n, x_m) < \varepsilon$ $\forall\, n, m \geq n_0$
Από την παραπάνω ανισότητα:

$$|x_n(i) - x_m(i)| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq n_0$$

Έτσι η $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον $\mathbb{R}$ άρα συγκλίνουσα.
Θέτουμε $x(i) = \lim_n x_n(i)$ και $x = (x(1), \dots, x(k))$

Εφόσον στον $\mathbb{R}^k$ η σύγκλιση είναι κατά συντεταγμένη προκύπτει ότι $\rho_2(x_n, x) \to 0$, δηλ. $x_n \xrightarrow{\rho_2} x$
Επομένως ο $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$ είναι πλήρης.

Σημείωση: Με παρόμοια επιχειρήματα ο $(\mathbb{R}^k, \rho_p)$ $1 \leq p \leq \infty$ είναι πλήρης.

Με τα ίδια ακριβώς βήματα μπορούμε να δείξουμε ότι αν (X, d) $i = 1, \dots, k$

ε) Έστω $X \neq \emptyset$ και ρ η διακριτή μετρική στο X. Τότε ο (X, ρ) είναι πλήρης.

Απόδ: Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στον (X, ρ)

Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ/ω $\rho(x_n, x_m) < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$

και άρα $x_n = x_m$ για κάθε $n, m \geq n_0$.

Συνεπώς $x_n = x_{n_0}$ $\forall n \geq n_0$. Επομένως η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή άρα συγκλίνουσα.

Ορισμός: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.
Ο $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Banach αν είναι πλήρης ως προς τη μετρική που επάγει η νόρμα

Πρόταση: Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $F \subseteq X$.
Αν το F είναι πλήρες (δηλ. ο (F, ρ_F) είναι πλήρης όπου ρ_F η σχετική μετρική) τότε το F είναι κλειστό.

Απόδ: Για να δείξουμε ότι το F είναι κλειστό αρκεί να δ.ο. αν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο F και $x \in X$ ώστε $x_n \to x$ τότε $x \in F$.

Εφόσον η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα, είναι βασική ακολουθία στο F και εφόσον ο F είναι πλήρης, υπάρχει $y \in F$ τ/ω $x_n \to y$.

Εφόσον $x_n \to x$ και $x_n \to y$, θα έχουμε $x = y$, εφόσον $y \in F$ συμπεραίνουμε $x \in F$

Άρα το F είναι κλειστό.

Πρόταση: Αν (X, ρ) πλήρης μ.χ. και $F \subseteq X$. Τότε το F είναι κλειστό αν και μόνο αν το F είναι πλήρες.

Απόδ: Αν το F είναι πλήρες τότε (από την προηγούμενη πρόταση) το F είναι κλειστό.

Υποθέτουμε ότι το F είναι κλειστό και δδο F πλήρες.

Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στο F.

Η (x_n) είναι βασική ακολουθία του X και εφόσον ο X είναι πλήρης, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x$.

Εφόσον το F είναι κλειστό και $x_n \in F$ $\forall n \in \mathbb{N}$, συμπεραίνουμε ότι $x \in F$.

Επομένως το F είναι πλήρες.

Θεώρημα: (Χαρακτηρισμός του Cantor για πλήρεις μετρικούς χώρους)

Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Τ.Α.Ε.Ι:

(i) Ο (X,ρ) είναι πλήρης $[F_{n+1} \subseteq F_n \ \forall n \in \mathbb{N}]$

(ii) Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κλειστών υποσυνόλων του X με διαμ$(F_n) \to 0$ ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.